МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 539.3 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-239-246

Действие вертикальной силы, движущейся по произвольному закону, на бесконечную пластину



А. В. Галабурдин

ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

Galaburdin@mail.ru

Введение. Рассматривается метод решения задачи о действии вертикальной силы, движущейся по произвольному закону, на бесконечную пластину. Данный метод и полученные результаты могут использоваться при изучении действия подвижной нагрузки на различные конструкции.

Материалы и методы. Разработан оригинальный метод решения задач о действии на бесконечную пластину, лежащую на упругом основании, вертикальной силы, движущейся произвольно по незамкнутой кривой произвольной формы. Для этого используется фундаментальное решение дифференциального уравнения динамики пластины, лежащей на упругом основании. Считается, что движение силы начинается в достаточно удаленный момент времени. Поэтому начальные условия в такой постановке задачи отсутствуют. При определении фундаментального решения выполняется преобразование Фурье по времени. При обращении преобразования Фурье изображение раскладывается по параметру преобразования в ряд по полиномам Эрмита.

Результаты исследования. Представлено решение задачи о бесконечной пластине, лежащей на упругом основании, по которой с переменной скоростью движется сосредоточенная сила. В качестве траектории рассматривалась гладкая незамкнутая кривая, состоящая из прямых и дуг окружностей. Изучается поведение компонент вектора перемещений и тензора напряжений в месте расположения движущейся силы, а также процесс распространения энергии волн, для чего рассматривается изменение вектора плотности потока энергии Умова-Пойнтинга. Исследуется влияние на перемещения, напряжения и распространение упругих волн скорости и ускорения перемещения силы. Изучается влияние формы траектории движения силы на напряженно-деформированное состояние пластины и на характер распространения упругих волн. Результаты свидетельствуют о том, что метод достаточно устойчив в широких пределах изменения скорости движения силы.

Обсуждение и заключения. Проведенные расчеты показали, что наиболее существенным фактором, влияющим на напряженно-деформированные состояния пластины и на распространение энергии упругих волн вблизи сосредоточенной силы, является скорость ее движения. Данные результаты будут полезны при изучении динамических процессов, порождаемых подвижной нагрузкой.

Ключевые слова: бесконечная пластина, движущаяся нагрузка, произвольная незамкнутая траектория, переменная скорость, энергия упругих волн.

Для цитирования: Галабурдин, А. В. Действие вертикальной силы, движущейся по произвольному закону, на бесконечную пластину / А. В. Галабурдин // Advanced Engineering Research. — 2021. — Т.21, № 3 — С. 239–246. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-239-246



An infinite plate loaded with a normal force moving along a complex open trajectory

A. V. Galaburdin
Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)
Galaburdin@mail.ru

Introduction. A method for solving the problem on the action of a normal force moving on an infinite plate according to an arbitrary law is considered. This method and the results obtained can be used to study the effect of a moving load on various structures.

Materials and Methods. An original method for solving problems of the action of a normal force moving arbitrarily along a freeform open curve on an infinite plate resting on an elastic base, is developed. For this purpose, a fundamental solution to the differential equation of the dynamics of a plate resting on an elastic base is used. It is assumed that the movement of force begins at a sufficiently distant moment in time. Therefore, there are no initial conditions in this formulation of the problem. When determining the fundamental solution, the Fourier transform is performed in time. When the Fourier transform is inverted, the image is expanded in terms of the transformation parameter into a series in Hermite polynomials.

Results. The solution to the problem on an infinite plate resting on an elastic base, along which a concentrated force moves at a variable speed, is presented. A smooth open curve, consisting of straight lines and arcs of circles, was considered as a trajectory. The behavior of the components of the displacement vector and the stress tensor at the location of the moving force is studied, as well as the process of wave energy propagation, for which the change in the Umov-Poynting energy flux density vector is considered. The effect of the speed and acceleration of the force movement on the displacements, stresses and propagation of elastic waves is investigated. The influence of the force trajectory shape on the stress-strain state of the plate and on the nature of the propagation of elastic waves is studied. The results indicate that the method is quite stable within a wide range of changes in the speed of force movement.

Discussion and Conclusions. The calculations have shown that the most significant factor affecting the stress-strain states of the plate and the propagation of elastic wave energy near the concentrated force is the speed of its movement. These results will be useful under studying dynamic processes generated by a moving load.

Keywords: infinite plate, moving load, arbitrary open trajectory, variable speed, energy of elastic waves.

For citation: A. V. Galaburdin. An infinite plate loaded with a normal force moving along a complex open trajectory. Advanced Engineering Research, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 239–246. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-239-246

Введение. Закономерности динамических процессов в твердых средах, вызванных действием подвижной нагрузки, представляют значительный интерес, а решения подобных задач находят многочисленные приложения и предполагают использование разнообразных методов. В ряде работ для исключения времени из числа независимых переменных вводилась подвижная система координат [1–2] или рассматривалась квазистатическая постановка задачи [3–6]. При решении указанных задач достаточно эффективными оказались метод конечных элементов [7], вариационные [8–10], а также прямые методы [11–13]. В работах [14–15] применялся метод граничных интегральных уравнений, а в работе [16] — метод, основанный на применении фундаментальных решений соответствующих дифференциальных уравнений. В настоящей работе этот метод применяется для решения задачи о действии на бесконечную пластину, лежащую на упругом основании, вертикальной силы, движущейся по незамкнутой кривой произвольной формы.

Постановка задачи. Следуя [17, 18], указанная задача сводится к решению уравнения:

$$\Delta^2 U + c^{-2}\partial_t^2 U + kU = \frac{P}{D}, \tag{1}$$

где U — прогиб пластины; $D = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; H — толщина пластины; $c^{-2} = \frac{\rho H}{D}$; ρ — плотность материала пластины; $k = \frac{k_o}{D}$; k_o — коэффициент жесткости упругого основания.

Решение данного уравнения соответствует потоку энергии, направленному от источников возбуждения в бесконечность. Будем полагать:

$$P = \delta(x - x_o(t))\delta(y - y_o(t)).$$

Данная сила перемещается по незамкнутой траектории γ, начало и конец которой уходят в бесконечность. Параметрическое задание траектории имеет вид: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t — время. Считается, что сила начинает

движение в начале траектории, расположенном на достаточном удалении от того места, в котором исследуется ее воздействие на пластину в момент времени $t=-\infty$. Поэтому начальные условия в такой постановке отсутствуют.

Материалы и методы. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (1), которое можно получить из уравнения:

$$\Delta^2 W + c^{-2}\partial_t^2 W + kW = \frac{1}{D}\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)\delta(t-\tau). \qquad (2)$$

Известно, что решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$U(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\iint_{R^2} W(x,x_o,y,y_o,t-\tau)P(x_o,y_o,\tau)dx_o dy_o d\tau.$$

В нашем случае с учетом конкретного вида движущейся силы имеем:

$$U(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,x_o(\tau),y,y_o(\tau),t-\tau)d\tau.$$

Применяя преобразование Фурье по времени к уравнению (2), получим дифференциальное уравнение:

$$\Delta^2 W_o - \omega^2 c^{-2} W_o + kW_o = \frac{1}{D}\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)e^{i\omega\tau}. \qquad (3)$$

Используя принцип предельного поглощения и преобразование Фурье по переменным x и y, и при условии $k > \frac{\omega^2}{c^2}$ можно получить решение уравнения (3):

$$W_0\left(x,x_0 y,y_0,\frac{\omega^2}{c^2}\right) = \frac{i}{4\pi\chi^2 D}[K_0(\alpha_1 R) - K_0(\alpha_2 R)],$$

где $R=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{1/2}$; $\chi = \sqrt[4]{k-\omega^2/c^2}$; $\alpha_1 = \chi e^{i\pi/4}$; $\alpha_2 = \chi e^{-i\pi/4}$; $K_0(z)$ — функция Макдональда.

При условии $k \le \frac{\omega^2}{c^2}$ решение уравнения (3) выглядит следующим образом:

$$W_0(x,x_0,y,y_0,\omega^2/c^2) = \frac{i}{4\pi\chi^2 D}\left[\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(\chi R) - K_0(\chi R)\right],$$

где $\chi = \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{c^2}-k}$; $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля.

Для обращения преобразования Фурье решение $W_0(x,x_0,y,y_0,\omega^2/c^2)$ раскладывается по переменной $\frac{\omega}{c}$ в ряд по системе ортогональных функций $\left\{e^{-\omega^2/c^2}H_k\left(\frac{\omega}{c}\right)\right\}$, где $H_k(z)$ — полиномы Эрмита.

Учитывая, что функция $W_0\left(x,x_0,y,y_0,\frac{\omega^2}{c^2}\right)$ является четной по $\frac{\omega}{c}$, в разложении будут присутствовать только четные слагаемые. Тогда:

$$W_0(x,x_0,y,y_0,\omega^2/c^2) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}(x,x_o,y,y_o)e^{-\omega^2/2c^2}H_{2k}\left(\frac{\omega}{c}\right), \text{ где}$$

$$w_{2k}(x,x_o,y,y_o) = \frac{1}{(2k)!2^{2k}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} W_0(x,x_0,y,y_0,z^2)\, e^{-z^2/2}H_{2k}(z)dz.$$

Учитывая соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2c^2}H_{2k}\left(\frac{\omega}{c}\right)e^{-i\omega t}d\omega = 2c\sqrt{\frac{\pi}{2}}(-1)^k e^{-c^2t^2/2}\, H_{2k}(ct),$$

получим:

$$W_0(x,x_0,y,y_0,t) = 2c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w_{2k}(x,x_o,y,y_o)e^{-c^2t^2/2}H_{2k}(ct).$$

В этом случае решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$U(x,y,t) = 2c\sqrt{\frac{\pi}{2}}2\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w_{2k}(x,x_o(\tau),y,y_o(\tau))e^{-c^2(t-\tau)^2/2}H_{2k}(c(t-\tau)\, d\tau.$$

Сделав замену переменной интегрирования, получим:

$$U(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_0(x,x_0(t-\frac{s\sqrt{2}}{c}),y,y_0(t-\frac{s\sqrt{2}}{c}),2\tau^2)\frac{2\sqrt{2}(-1)^k}{(2k)!\,2^{2k}}e^{-(s^2+\tau^2)}H_{2k}(s\sqrt{2})H_{2k}(\tau\sqrt{2})dsd\tau.$$

Такой вид решения позволяет для вычисления интеграла применить квадратурную формулу Гаусса-Эрмита.

Чтобы улучшить сходимость ряда использовался метод Куммера. Следуя этому методу, необходимо подобрать ряд, сумма которого известна, а разность исходного ряда и ряда подобранного должна представлять быстро сходящийся ряд. В качестве такого ряда можно взять:

$$U^*(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_0(x,x_0(t-{s\sqrt{2}}/{c}),y,y_0(t-{s\sqrt{2}}/{c}),q)\,\frac{2\sqrt{2}(-1)^k}{(2k)!2^{2k}}\,e^{-(s^2+\tau^2)}H_{2k}(s\sqrt{2})H_{2k}(\tau\sqrt{2})dsd\tau,$$

где q — некоторая неотрицательная величина.

Проинтегрировав по переменной τ и просуммировав, получим:

$$U^*(x,y,t) = \pi c\sqrt{2}W_0(x,x_o(t),y,y_o(t),q).$$

Окончательно для решения уравнения (1) получим следующее выражение:

Механика

$$U(x,y,t) = U^*(x,y,t) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_0(x,x_0(t-{}^{s\sqrt{2}}/_{c}),y,y_0(t-{}^{s\sqrt{2}}/_{c}),2\tau^2)-W_0(x,x_0(t-{}^{s\sqrt{2}}/_{c}),y,y_0(t-{}^{s\sqrt{2}}/_{c}),q))\times$$
$$\times\frac{2\sqrt{2}(-1)^k}{(2k)!\,2^{2k}}e^{-(s^2+\tau^2)}H_{2k}(s\sqrt{2})H_{2k}(\tau\sqrt{2})dsd\tau.$$

Для суммирования ряда применялся способ средних арифметических. При этом полагалось: $q = 0$.

Определив прогибы пластины, можно по известным формулам вычислить остальные компоненты вектора перемещения и тензора напряжений в любой ее точке. Для анализа перемещения энергии упругих волн в пластине вычислялся вектор плотности потока энергии Умова- Пойнтинга:

$$\bar{E} = -(\sigma_x\dot{u} + \sigma_{xy}\dot{v})\vec{i} - (\sigma_{xy}\dot{u} + \sigma_y\dot{v})\vec{j}.$$

Результаты исследования. Проведены расчеты для случая, когда сила двигается по траектории, состоящей из прямых и дуг окружностей (рис. 1). При этом принимались следующие значения параметров: $H = 0{,}25$ м; $c = 221$ м/с; $E = 232469$ Н/м$^{2;}$ $\mu = 0{,}36$; $K = 1{,}864$ м$^{-4}$. Параметры закона движения силы по траектории подбирались таким образом, чтобы в рассматриваемый момент времени сила всегда находилась в одной и той же точке траектории, отмеченной звездочкой, имея различные значения скорости v и ускорения a, а также при разных значениях радиуса траектории R_2. Для изучения напряженно-деформированного состояния пластины вычислялись перемещения и напряжения вблизи точки приложения силы.

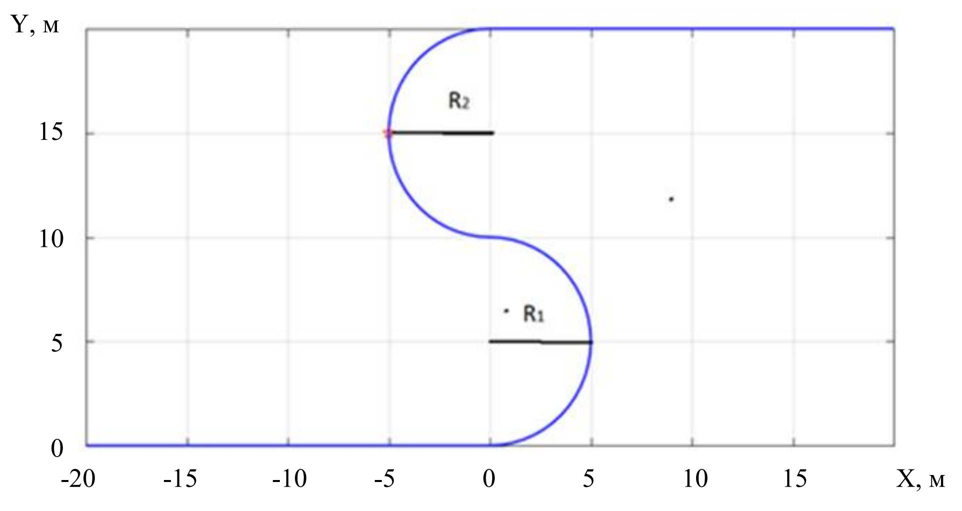


Рис. 1. Траектория движения сосредоточенной силы

На рис. 2, 3 представлено изменение перемещений и напряжений при движении сосредоточенной силы по заданной траектории при $v = 25$ м/с, $a = 0$ м/с^2, $R_2 = 5$ м. Изменение указанных величин вдоль оси Y практически не отличается от их изменения вдоль оси X.

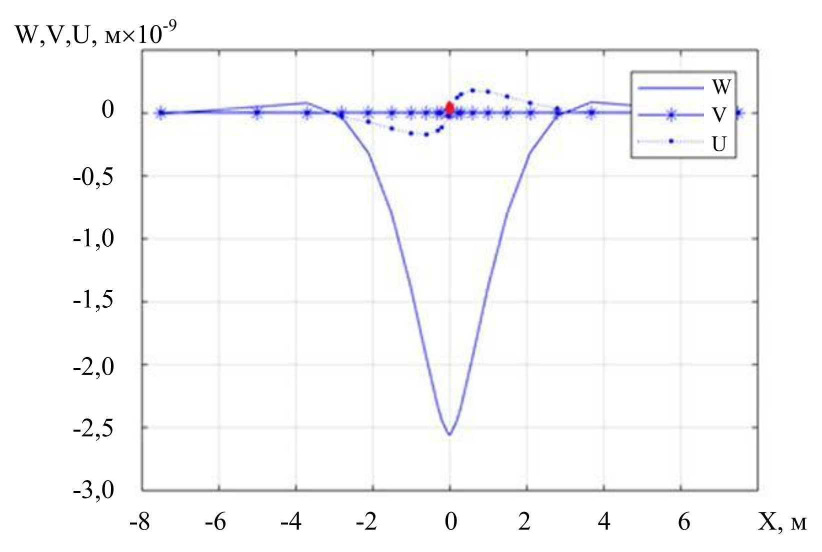


Рис. 2. Изменение перемещений: W — вертикальное; U — вдоль оси X; V — вдоль оси Y

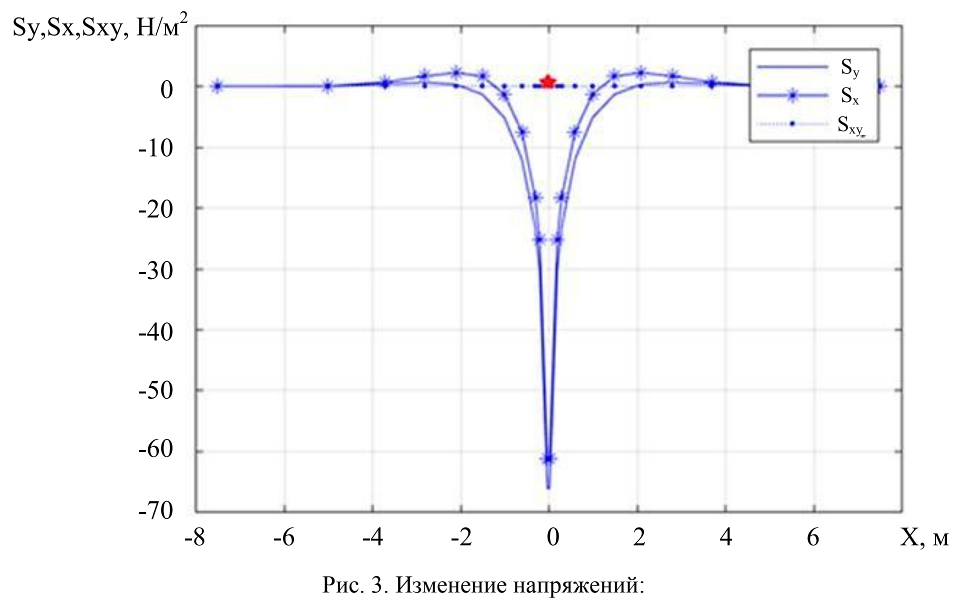


Рис. 3. Изменение напряжений:
W — вертикальное; U — вдоль оси X; V — вдоль оси Y

На рис. 4 представлено перемещение энергии упругих волн вблизи сосредоточенной силы, положение которой на траектории обозначено красной точкой. Векторы определяют количество и направление переноса энергии в данной точке.

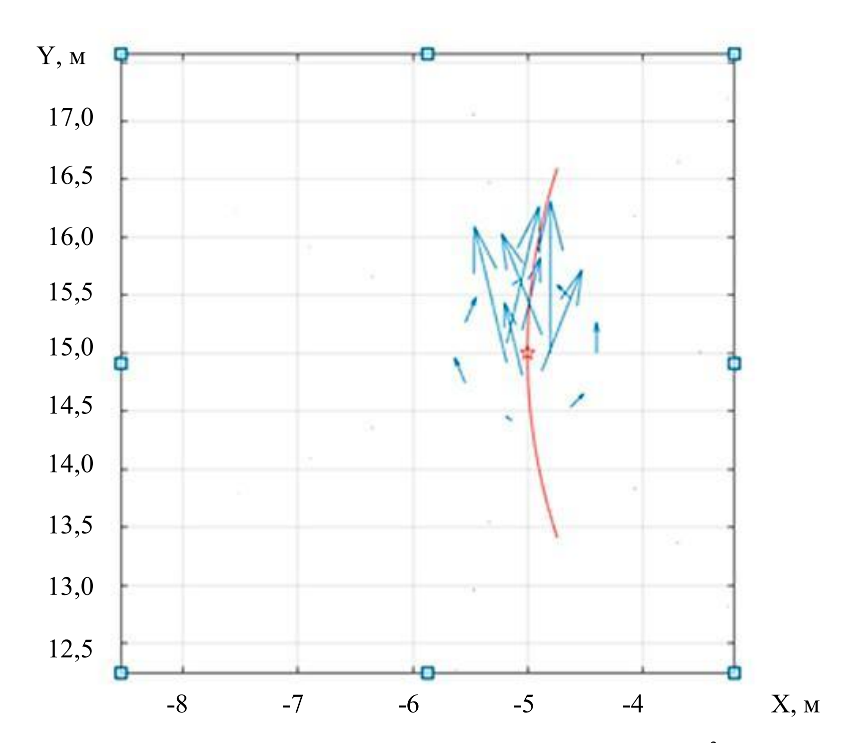


Рис. 4. Вектор плотности потока энергии при v = 25 м/с, a = 0 м/с^2, R_2 = 5 м

Расчеты показали, что при увеличении скорости движения силы качественного изменения перемещений и напряжений не происходит, а происходит лишь их количественный рост. Незначительное изменение качественного поведения перемещений и напряжений наблюдается только при достаточно больших скоростях, когда выполняется условие $v > c$. Это следует из рис. 5, 6 (a = 0 м/с^2, R_2 = 5 м).

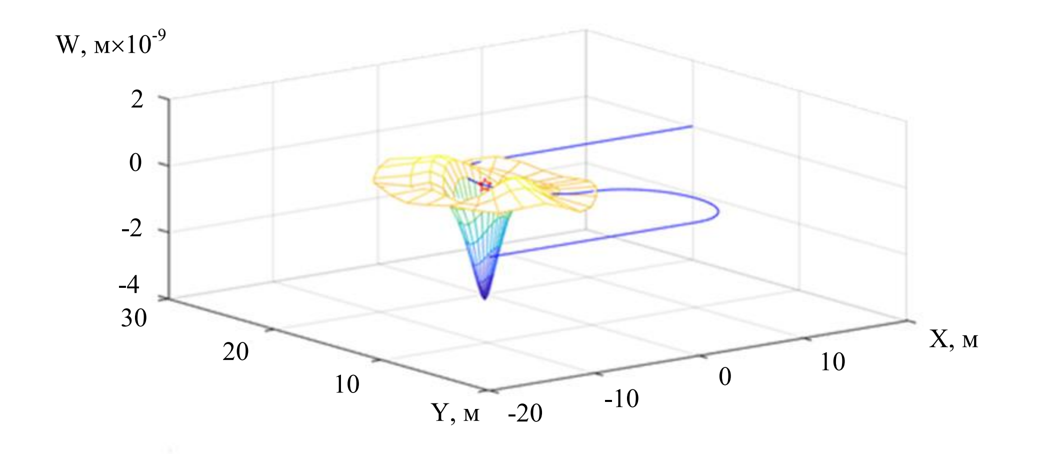


Рис. 5. Изменение вертикальных перемещений при v = 275 м/с

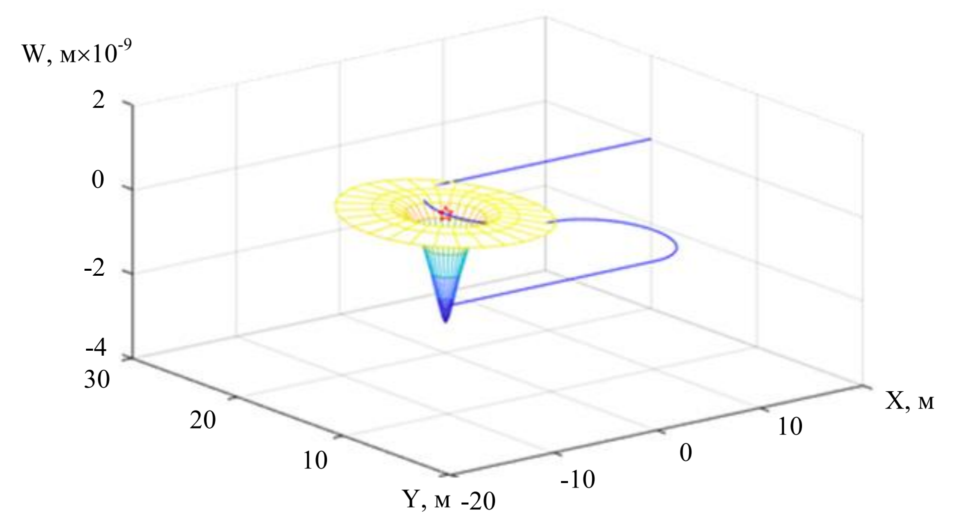


Рис. 6. Изменение вертикальных перемещений при v = 75 м/с

На рис. 7, 8 представлено изменение максимальных вертикальных перемещений W и напряжений S_x , S_y в зависимости от скорости движения силы при $a = 0$ м/с^2, $R_2 = 5$ м. Остальные компоненты перемещений и напряжений принимали достаточно малые значения и поэтому не представляли конструктивного интереса при анализе напряженно-деформированного состояния пластины.

Вычисления, проведенные при различных значениях ускорения и радиуса R_2, показали, что эти факторы слабо влияют на напряженно-деформированное состояние пластины. Также слабо зависит от указанных факторов качественная картина распространения энергии волн вблизи сосредоточенной силы.

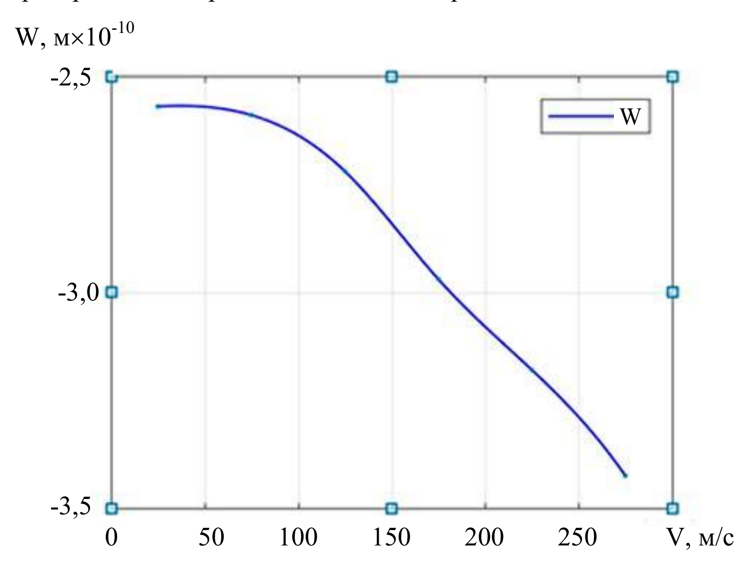


Рис. 7. Зависимость максимальных вертикальных перемещений от скорости движения сосредоточенной силы

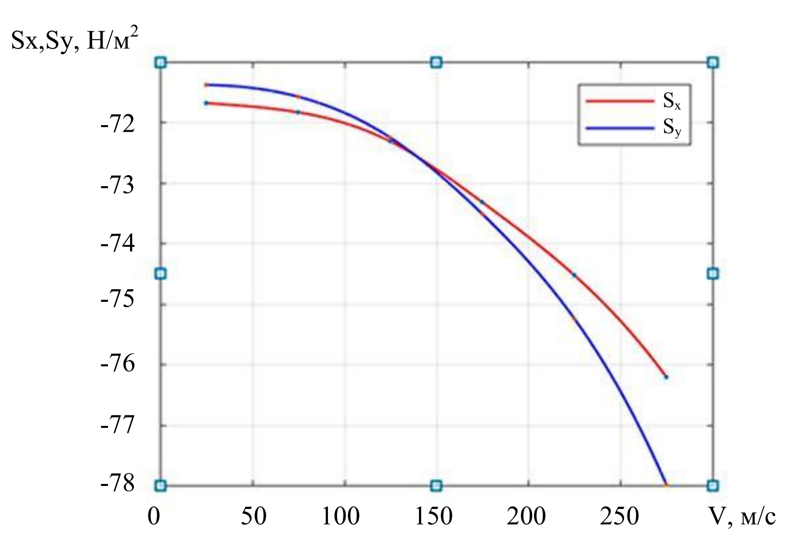


Рис. 8. Зависимость максимальных напряжений от скорости движения сосредоточенной силы

Обсуждение и заключения. Наиболее существенное влияние на напряженно-деформированное состояние пластины и распространение энергии упругих волн вблизи сосредоточенной силы оказывает скорость ее движения. Радиус кривизны траектории и ускорение движения силы влияют несущественно.

Результаты расчета свидетельствуют о том, что метод решения задач о действии подвижной нагрузки достаточно устойчив в широких пределах изменения скорости ее движения. Метод экономичен и прост, т. к. в нем используются уже известные фундаментальные решения.

Библиографический список

1. Onur Şahin. Response of a 3D elastic half-space to a distributed moving load / Onur Şahin, Barış Erbaş, Nihal Ege // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. — 2017. — Vol. 46 (5). — P. 817–828. https://doi.org/10.15672%20/HJMS.2017.434

2. Динамика слоистого полупространства под действием движущейся и осциллирующей нагрузки / В. В. Калинчук, Т. И. Белянкова, Г. Шмид, А. Тосецки // Вестник Южного научного центра РАН. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 3–11.

3. Yuyan Chen. Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic poroelastic halfplane to a load moving on its surface / Yuyan Chen, Niki D. Beskou, Jiang Qian // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2018. — Vol. 107. — P. 292–302. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.01.038

4. Kaplunov, J. The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate / Julius Kaplunov, Danila A. Prikazchikov, Graham A. Rogerson // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 136 (4). — P. 1487–1490. https://doi.org/10.1121/1.4894795

5. Егорычев, О. О. Воздействие подвижной нагрузки на многослойную вязкоупругую пластину, лежащую на вязкоупругом основании / О. О. Егорычев // Вестник Московского государственного строительного университета. — 2007. — Вып. 1. — С. 39–42.

6. Динамическое поведение безграничной упругой пластинки при воздействии подвижной (бегущей) нагрузки / М. Ж. Досжанов, Е. Н. Искак, Б. Ж. Сактаганов [и др.] // Путь науки. — 2016. — Т. 1, № 11 (33). — С. 26–28.

7. Шишмарев, К. А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки / К. А. Шишмарев // Известия Алтайского государственного университета. — 2015. — № 1/2 (85). — С. 189–194. https://doi.org/10.14258/izvasu(2015) 1.2–35

8. Dyniewicz, B. Vibrations of a Mindlin plate subjected to a pair of inertial loads moving in opposite directions / Bartłomiej Dyniewicz, Dominik Pisarski, Czesław I. Bajer // Journal of Sound and Vibration. — 2017. — Vol. 386. — P. 265–282. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.09.027

9. Esen, I. A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass / Ismail Esen // Finite Elements in Analysis and Design. — 2013. — Vol. 66. — P. 26–35. https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.11.005

10. Song Qinghua. Vibration analysis of functionally graded plate with a moving mass / Song Qinghua, Shi Jiahao, Liu Zhanqiang // Applied Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 46. — P. 141–160. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.073

11. Parametric study of dynamic response of sandwich plate under moving loads / Qinghua Song, Zhanqiang Liu, Jiahao Shi, Yi Wan // Thin-Walled Structures. — 2018. — Vol. 123. — P. 82–99. https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.11.012

12. Time-domain structural-acoustic analysis of composite plates subjected to moving dynamic loads / Yegao Qu, Wenming Zhang, Zhike Peng, Guang Meng // Composite Structures. — 2019. — Vol. 208. — P. 574–584. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.09.103

13. Foyouzat, M. A. An analytical-numerical solution to assess the dynamic response of viscoelastic plates to a moving mass / M. A. Foyouzat, H. E. Estekanchi, M. Mofid // Applied Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 54. — P. 670–696. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.037

14. Галабурдин, А. В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению связных задач термоупругости с подвижной нагрузкой / А. В. Галабурдин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2012. — № 4. — С. 29–31.

15. Галабурдин, А. В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке / А. В. Галабурдин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 1. — С. 9–11.

16. Галабурдин, А. В. Задача о бесконечной пластине, нагруженной нормальной силой, движущейся по сложной траектории / А. В. Галабурдин // Вестник Донского государственного технического университета. — 2019. — Т. 19, № 3. — С. 208–213. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-3-208-213

17. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. — Москва : Наука, 1968. — 560 с.

18. Бреббия, К. Методы граничных уравнений / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — Москва : Мир, 1987. — 524 с.

Поступила в редакцию 26.07.2021
Поступила после рецензирования 09.08.2021
Принята к публикации 09.08.2021

Об авторе:

Галабурдин Александр Васильевич, доцент кафедры «Математика и информатика», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0411-6724, Galaburdin@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.